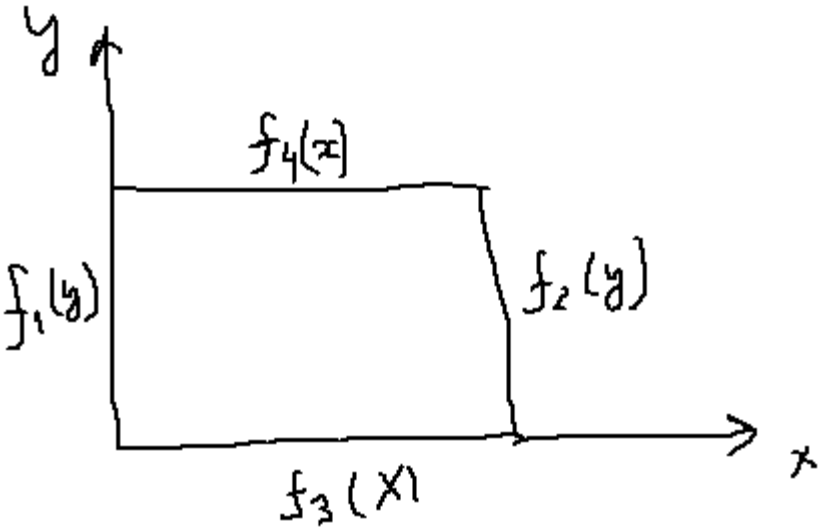
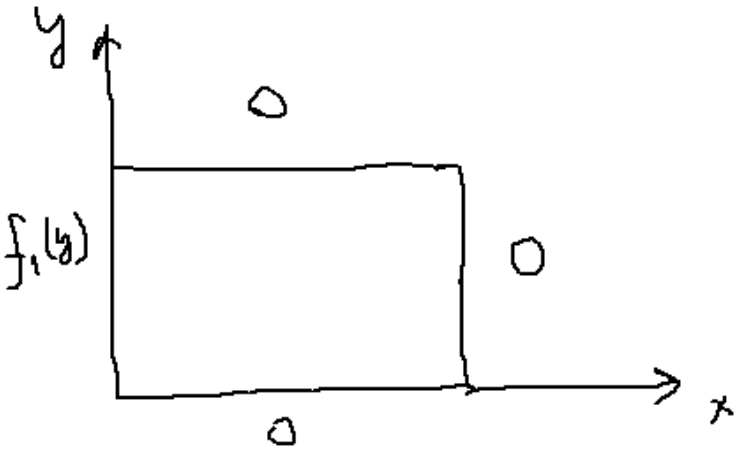
В задачах 3 на границе у нас появляется какая-то функция!

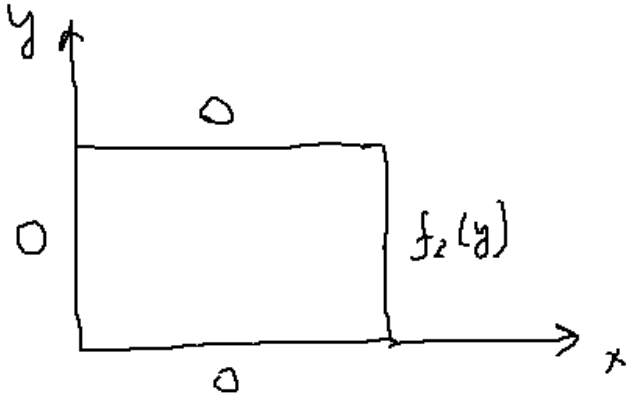


Она может быть равна самой u (ГУ 1 рода), производной по нормали (ГУ 2 рода) или линейной комбинацией того и другого.
Изобразим граничные условия в виде четырёх функций одной переменной. Они нам известны.

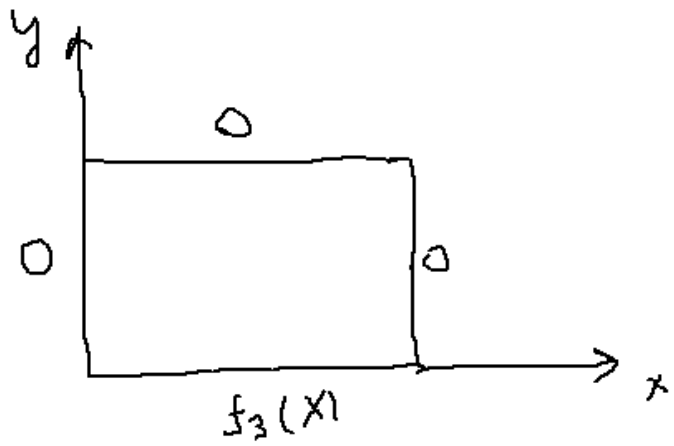
Математики делают хитро. Оно говорят: представим функцию u в виде суммы четырёх функций u1, u2, u3, u4, причём каждая из них будет удовлетворять уравнению Лапласа, а первая будет удовлетворять таким граничным условиям:



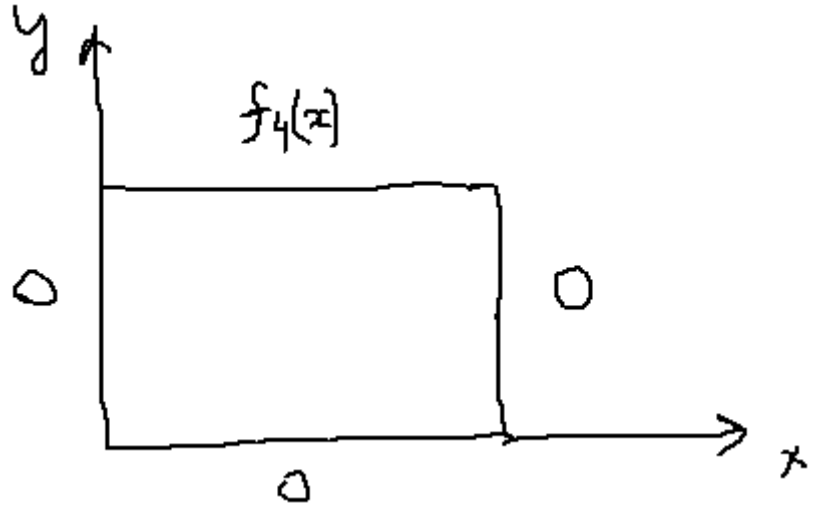
U2 – таким



U3 – таким

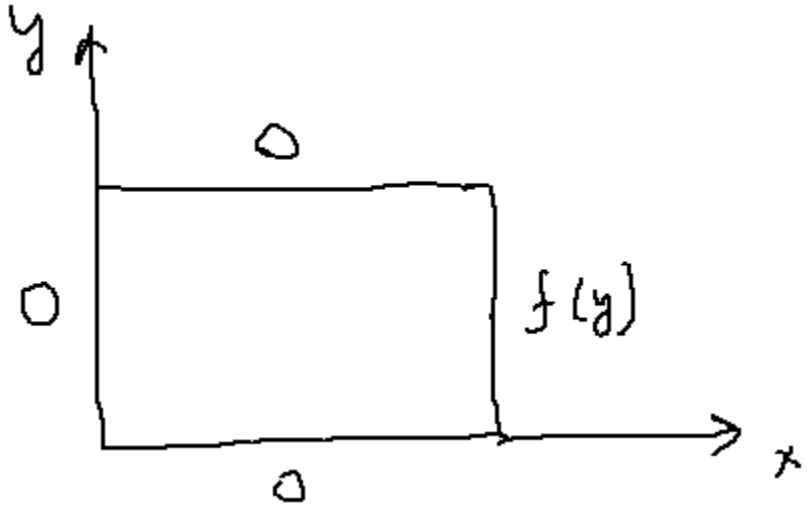


U4 – таким



Их сумма в силу линейности лапласиана будет также удовлетворять уравнению Лапласа, а заодно, как можно понять, и всем граничным условиям.

Так что нам достаточно решать задачу, когда на трёх из 4 сторонах прямоугольниках нули, и лишь на одной стороне неоднородность. Кафмат вроде как только такие задачи и даёт. Ну, например, такую:



Приступаем к решению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Представим u=X(x)Y(y).

$$X_{xx}(x)Y(y) + Y_{yy}(y)X_x = 0$$

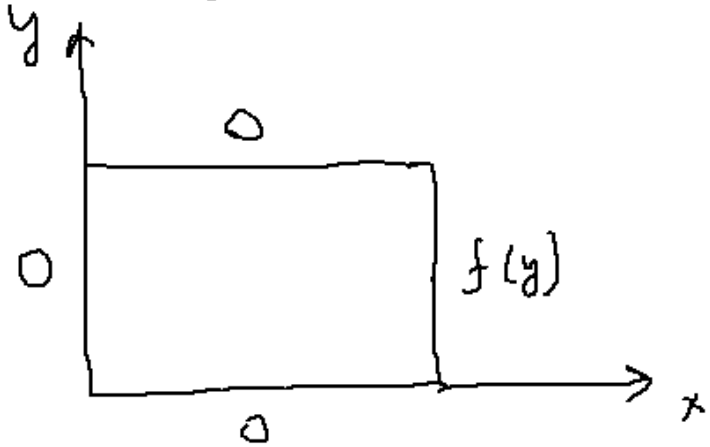
Делим переменные:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} + \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = 0$$

Оба слагаемых константы. Одно из них положительно, другое отрицательно. С какой бы начать? Тут не всё равно, лишь один выбор верный!

Назовём ось координат, пересекающую «неоднородную» сторону прямоугольника, неоднородной. Тогда неоднородная сторона имеет уравнение «неоднородная координата = const». Однако функция будет как раз функцией однородной координаты.

На данной картинке



неоднородной координатой будет x, а однородной – y.

Эта терминология нужна, чтобы сформулировать правило, которое будет работать и в двумерном, и в трёхмерном случае:

В задачах 3 у тебя по одной переменный однородные ГУ (оба), а по другой нет (если по всем неоднородные, сначала представь решение в виде суммы (см.выше), а потом возвращайся туда.

Так вот, начни решать с **однородных** координат! Неоднородную оставь на потом.

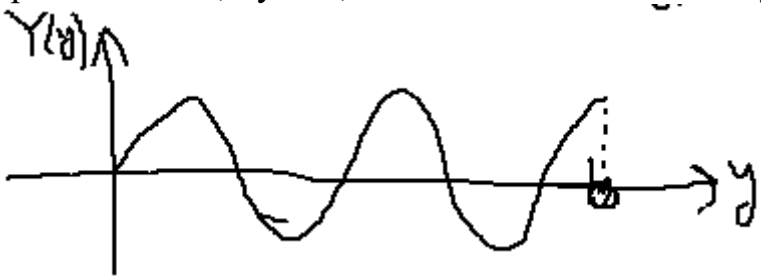
Следуем правилу. А для однородной координаты уравнение «вторая производная функции делить на саму функция есть константа» мы уже решать умеем – это косинус или синус.

Например, пусть у нас в условии задачи попались вот такие ГУ:

$$u\big|_{x=0} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x=a} = 0$$

Тогда решением будет синус (чтобы он был ноль в нуле), а чтобы обнулилась его производная а, нужно, чтобы от 0 до а было полуцелое число периодов.



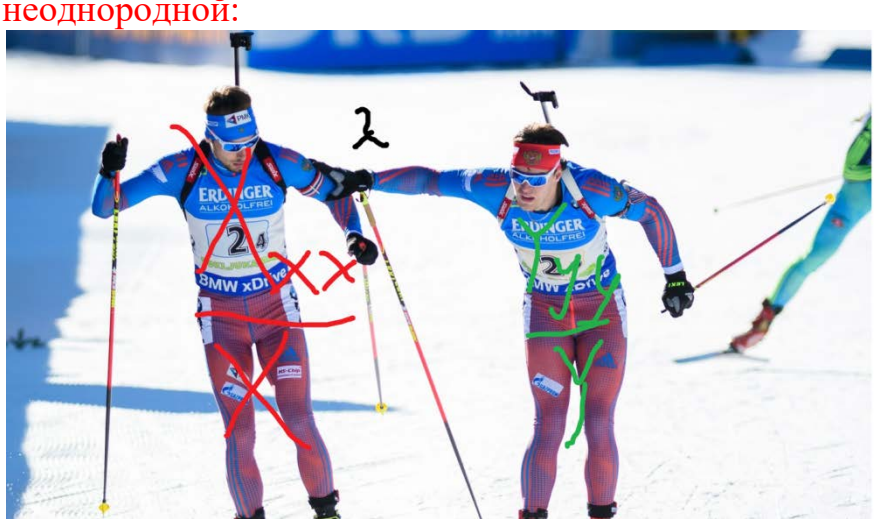
Это будет $\sin\left(\frac{\pi(n-\frac{1}{2})y}{b}\right),\ n \in \mathbb{N}$

Итак, мы нашли решение по однородной координате. Теперь считаем отношение второй производной к самой функции. Оно всегда будет отрицательным:

$$-\frac{\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{b^2}$$

Вспоминаем, что $\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} + \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = 0$, т. е. $\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)}$. Тогда для неоднородной координаты получаем значение оператора Буткарёва для $\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$, равное $\frac{\pi^2\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}{b^2}$.

Это можно сравнить с передачей эстафеты: получив значение оператора Буткарёва для однородной координаты, оно, как эстафетная палочка, передаётся неоднородной:



Корень из этой величины обозначим как s_n:

$$s_n = \frac{\pi\left(n - \frac{1}{2}\right)}{b}$$

Если отношение второй производной функции к самой функции отрицательно, то это синус или косинус. А если положительно – шинус или чосинус. Или e^x и e^{-x}. Какую именно ФСР выбрать – с экспонентами или с тригонометрией?

Правило 2. Желательно, чтобы каждая из двух функций ФСР должна занулять левую часть одного из граничных условий (напомню, что одно однородное, а другое нет).

Начните с того, что посмотрите на однородное на граничное условие. Пусть оно, например, в нуле. Если оно первого рода, то вам нужен $sh(s_n*x)$ – он в нуле зануляется. Если оно второго рода, то вам нужен $ch(s_n*x)$ – у него в нуле зануляется производная.

Если однородное граничное условие не в нуле, а в точке x=a, то всё так же. Если оно первого рода, то вам нужен $sh(s_n*(x-a))$ – он в нуле зануляется. Если оно второго рода, то вам нужен $ch(s_n*(x-a))$ – у него в нуле зануляется производная.

Наличие множителя s_n в аргументе чосинуса или шинуса необходимо, чтобы

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)}$$

было как раз s_n^2 (что нам и нужно, т.к. $\frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = -s_n^2$).

Точно так же поступаем с неоднородным граничным условием, подбирая вторую функцию ФСР. В правой части неоднородного граничного условия стоит функция (вообще говоря, игрека, т.е. однородной переменной) – на неё пока вообще забейте, на левую часть смотрите.

Условие первого рода? Пишите шинус! Второго – чосинус!

А если ГУ третьего рода (на одной из границ, или даже на обоих)? Неприятная ситуация. У вас два выхода: или изобрести свою функцию, линейную комбинацию C1*sh x + C2*ch x, которая занулится где надо, или всё-таки наплевать на правило 2, выписав ФСР с чем хочется – и далее страдать.

U – эта сумма всевозможных пара $X_n(x)Y_n(y)$

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$$

Разумеется, раз каждая пара $X_n(x)Y_n(y)$ удовлетворяет дифуру Лапласа, то и их сумма тоже. Также каждая пара удовлетворяет двум расположенным друг напротив друга граничным условиям, т.к. все $Y_n(y)$ мы заботливо так специально

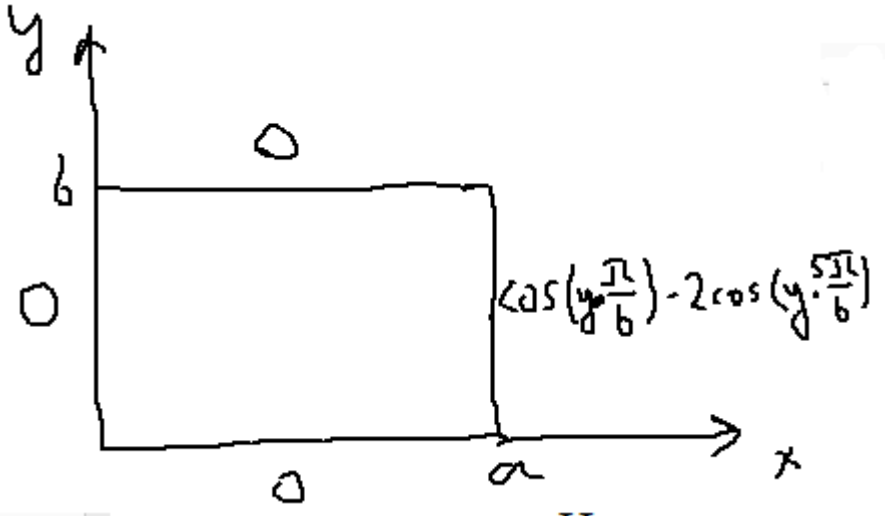
подобрали (вспомните картинку 

- где надо, занулится функция, где надо – её производная). Иная ситуация с $X_n(x)$. Именно эту пару граничных условий (неоднородное и однородное напротив него) сейчас будем проверять.

$X_n(x)=A_n *X_1(x)+ B_n *X_2(x)$

Подставляем $X_n(x)$ в сумму $\sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y)$, подставляем $Y_n(y)$ (косинус или синус, что у нас там было) и пишем два уравнения для каждой из двух сторон прямоугольника. Не забываем, что там мы должны подставить одну из переменных – как раз неоднородную, т.е. x.

Пример: Оба условия на вертикальных границах пусть 1 рода, на горизонтальных 2 рода. Поэтому решением $Y_n(y)$ будет косинусы $\cos(\pi ny/b)$ с $s_n = \pi n/b$.



Т.к. мы послушались правила 2, то написали бы ФСР

$X_n(x)=A_n*sh(s_n*x)+B_n*sh(s_n*(x-a))$

(А если бы не послушались, то выписали бы шинус и чосинус

$\_X_n(x)=\_A_n*sh(s_n*x)+\_B_n*ch(s_n*x))$

Но мы так не сделали).

Тогда $u_n(x)= X_n(x)* Y_n(y)$

$$u(x,y) = \sum_n X_n(x)Y_n(y) = \sum_n \left(A_n sh(s_n x) + B_n sh\big(s_n(x-a)\big) * \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\right)$$

Подставляем x 0 и a:

$$u(0,y) = \sum_n B_n sh(s_n(0-a)) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)$$

$$u(a,y) = \sum_n A_n sh(s_n a) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)$$

Теперь понятно, почему ФСР желательно подбирать так, чтобы при подстановке занулялась хотя бы одна из функций: тогда A_n и B_n разделяются.

Если бы ФСР была бы тупо C1*sh(x)+C2*ch(x), то одно из уравнений содержало бы и A_n , и B_n. А если бы C1*exp(x)+C2*exp(-x), то уже оба уравнения содержали бы и Ашки, и Бшки.

$$u(x,y) = \sum_n X_n(x)Y_n(y) = \sum_n \left(A_n sh(s_n x) + B_n sh\big(s_n(x-a)\big) * \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\right)$$

Т.к. при x=0 u=0 (это левая стенка нашего прямоугольника, см. рисунок), то все Вшки равны 0! Часть с $B_n sh\big(s_n(x-a)\big)$ можно исключить:

$$u(x,y) = \sum_n A_n sh(s_n x)\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)$$

А теперь ну очень важный момент. Что на правой стенке? А там $\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) - 2\cos\left(\frac{5\pi y}{b}\right)$! Сравним зрительно это ГУ:

$$u(a,y) = \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) - 2\cos\left(\frac{5\pi y}{b}\right)$$

и решение

$$u(x,y) = \sum_n X_n(x)Y_n(y) = \sum_n \left(A_n sh(s_n x) + B_n sh\big(s_n(x-a)\big) * \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\right)$$

Из функции в ГУ видно, что из всей суммы нам достаточно двух слагаемого – соответствующих $\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)$ и $\cos\left(\frac{5\pi n y}{b}\right)$. Т.е.

$$u(x,y) = A_1 sh(s_1 x)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) + A_5 sh(s_5 x)\cos\left(\frac{5\pi y}{b}\right)$$

А все остальные слагаемые, соответствующие другим n:

$$A_2 sh(s_2 x)\cos\left(\frac{2\pi y}{b}\right), A_3 sh(s_3 x)\cos\left(\frac{3\pi y}{b}\right)$$

мы можем исключить.

Этот метод «выкидывания» ненужных слагаемых я называю методом засвеченных индексов: остаются только те индексы, которые «засветились» в граничных условиях.

Имея совсем уже ясную заготовку под ответ

$$u(x,y) = A_1 sh(s_1 x)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) + A_5 sh(s_5 x)\cos\left(\frac{5\pi y}{b}\right)$$

Нам осталось найти A_1 и A_5. С

Перед $\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$ коэффициент 1. Значит, тогда $A_1 sh(s_1 a) = 1$

А перед $\cos\left(\frac{5\pi y}{b}\right)$ коэффициент -2. Значит, тогда $A_5 sh(s_5 a) = -2$

Итак, все Ашки тоже, кроме A1 и A5. А они оказываются равными

$$A_1 = \frac{1}{sh(s_1 a)}, A_5 = \frac{-2}{sh(s_5 a)}$$

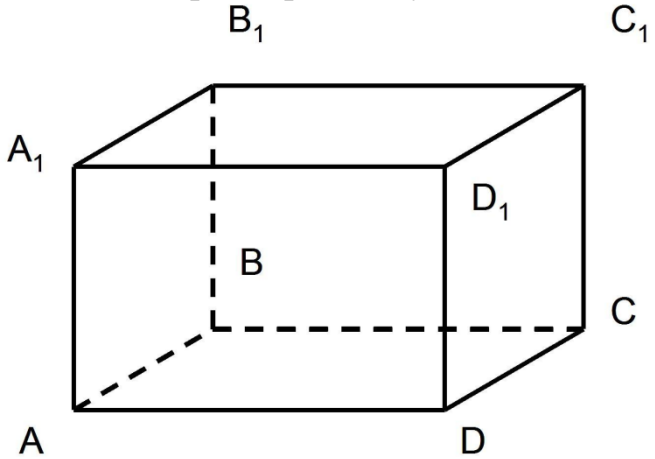
Вспоминаем выражение для u и записываем ответ:

$$u(x,y) = A_1 sh(s_1 x)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) + A_5 sh(s_5 x)\cos\left(\frac{5\pi y}{b}\right)$$

вспоминаем, что $s_n = \pi n/b$ и записываем окончательный ответ:

$$u(x,y) = \frac{1}{sh(\frac{\pi}{b}a)} sh\left(\frac{\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{\pi y}{b}\right) - \frac{2}{sh(\frac{5\pi}{b}a)} sh\left(\frac{5\pi}{b}x\right)\cos\left(\frac{5\pi y}{b}\right)$$

А что же в трёхмерном случае? Да то же самое. У параллелепипеда 6 граней:



На каждой можно задать по ГУ. Естественно, u аналогично представляется в виде суммы u-шек:

$$u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6$$

Где каждая u имеет однородные ГУ на 5 гранях, и лишь на одной - неоднородные.

Аналогично для каждой u-шки делим переменные

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} + \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} + \frac{Z_{zz(z)}}{Z(z)} = 0$$

Т.к. «неоднородная» грань всего одна, то у нас две однородные переменные и одна неоднородная. Следуя правилу, начинаем задачу с однородных (пускай это будут x и y), решая задачу 2:

$$\frac{X_{xx}(x)}{X(x)} + \frac{Y_{yy}(y)}{Y(y)} = \lambda$$

а затем уже неоднородная координата получает «эстафетную палочку» - значение оператора Буткарёва:

$$\frac{Z_{zz(z)}}{Z(z)} = -\lambda$$

Ну, например, ГУ были такие:

$$u_{x=0,x=a} = 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0$$
$$u_{y=a} = 0$$

Тогда СФ будут

$$u_{nm}(x,y) = \sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)y}{a}\right)$$

С СЗ

$$\lambda_{nm} = \left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{b}\right)^2$$

И этот набор СЗ передаётся однородной координате

Получаем, что

$$\frac{Z_{zz(z)}}{Z(z)} = \lambda_{nm}$$

Обозначим

$$w_{nm} = \sqrt{\lambda_{nm}}$$

А это мы уже решать умеем – шинусы и чосинусы. Какие там ГУ на z в условии были? Давайте я выдумаю:

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = 5\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi y}{2}}{a}\right), \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=c} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi y}{2}}{a}\right)$$

По ГУ Неймана получаем, что нужно искать решение в виде чосинусов:

$$Z(z) = \sum_{n,m}(A_{nm}\,\mathrm{ch}(w_{nm}z) + B_{nm}\,\mathrm{ch}(w_{nm}(c-z)))$$

Т.к. оба ГУ неоднородны, то на этот раз будут ненулевые и Ашки, и Вшки:

$$u(x,y,z) = \sum_{n,m}\sin\left(\frac{\pi n x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)y}{a}\right)(A_{nm}\,\mathrm{ch}(w_{nm}z) + B_{nm}\,\mathrm{sh}(w_{nm}(c-z)))$$

(можно было представить u в виде суммы v с w, у каждой из которой было по однородному ГУ, но мы не будем этого делать).

Иметь сумму достаточно неудобно. Применим метод засвеченных индексов: посмотрим на ГУ: там явно угадывается n=1, m=2 и n=2, m=1.
Значит,

$$u(x,y,z) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi y}{2}}{a}\right)(A_{12}\,\mathrm{ch}(w_{12}z) + B_{12}\,\mathrm{ch}(w_{12}(c-z)))$$
$$+ \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi y}{2}}{a}\right)(A_{21}\,\mathrm{ch}(w_{21}z) + B_{21}\,\mathrm{ch}(w_{21}(c-z)))$$

Возьмём производную и подставим z=0 и z=c:

$$\frac{\partial u(x,y,0)}{\partial z} = w_{12}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi y}{2}}{a}\right)B_{12}\,\mathrm{sh}(w_{12}c) + w_{21}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi y}{2}}{a}\right)B_{21}\,\mathrm{sh}(w_{21}c)$$

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial z} = w_{12}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi y}{2}}{a}\right)A_{12}\,\mathrm{sh}(w_{12}c) + w_{21}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi y}{2}}{a}\right)A_{21}\,\mathrm{sh}(w_{21}c)$$

Сопоставляя с ГУ

$$\frac{\partial u}{\partial z}|_{z=0} = 5\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi y}{2}}{a}\right), \frac{\partial u}{\partial z}|_{z=c} = -\frac{1}{2}\sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi y}{2}}{a}\right)$$

Получаем

$$\begin{cases} w_{12}B_{12}\,\mathrm{sh}(w_{12}c) = 5 \\ w_{21}B_{21}\,\mathrm{sh}(w_{21}c) = 0 \\ w_{12}A_{12}\,\mathrm{sh}(w_{12}c) = 0 \\ w_{21}A_{21}\,\mathrm{sh}(w_{21}c) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Откуда выражаем константы

$$\begin{cases} B_{12} = \dfrac{5}{w_{12}\,\mathrm{sh}(w_{12}c)} \\ B_{21} = 0 \\ A_{12} = 0 \\ A_{21} = -\dfrac{1}{2w_{21}\,\mathrm{sh}(w_{21}c)} \end{cases}$$

Подставляем это в заготовку под ответ:

$$u(x,y,z) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi y}{2}}{a}\right)(A_{12}\,\mathrm{ch}(w_{12}z) + B_{12}\,\mathrm{ch}(w_{12}(c-z)))$$
$$+ \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi y}{2}}{a}\right)(A_{21}\,\mathrm{ch}(w_{21}z) + B_{21}\,\mathrm{ch}(w_{21}(c-z)))$$

Получаем

$$u(x,y,z) = \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{3\pi y}{2}}{a}\right)\frac{5}{w_{12}\,\mathrm{sh}(w_{12}c)}\mathrm{ch}(w_{12}(c-z))$$
$$- \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{\frac{\pi y}{2}}{a}\right)\frac{1}{2w_{21}\,\mathrm{sh}(w_{21}c)}\mathrm{ch}(w_{21}z)$$

Где

$$w_{nm} = \sqrt{\lambda_{nm}} = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi\left(m-\frac{1}{2}\right)}{b}\right)^2}$$

Итоги

Во-первых, замечание: решения задач 2 и 3 СИЛЬНО отличаются:
В задаче 2 нам приходилось определять СЗ, в задачах 3 такого нет!

В задаче 2 у нас были только синусы и косинусы, в задаче 3 вылезли гиперболические функции!
Это связано с тем, что в задачах 2 оператор Буткарёва всегда отрицателен:

$$\frac{Z_{zz\,(z)}}{Z(z)} = -\lambda$$

В задачах 3 он может быть как отрицательным (для однородных переменных), а для неоднородных ему придётся быть положительным.

Алгоритм решения задачи 3:
1) Если это необходимо, представления u в виде суммы u1,u2,u3, чтобы неоднородные ГУ были только по одной переменной
2) Выделению однородных и неоднородной переменной. Решению задачи 2 для однородных переменных, выписывание синусов-косинусов (в зависимости от вида ГУ)
3) Пониманию, чему должен быть равен оператор Буткарёва для неоднородной переменной:

$$\frac{Z_{zz\,(z)}}{Z(z)} = -\lambda = -\left(\frac{X_{xx\,(x)}}{X(x)} + \frac{Y_{yy\,(y)}}{Y(y)}\right)$$

4) Решение для неоднородной переменной методом засвеченных индексов, оглядываясь на ГУ.

В дальнейшем мы будем решать задачи 2 и 3 для кучи разных областей.